

DEMONSTRATION PARALLELOGRAMME

1/ Qu'est-ce qu'un parallélogramme ?

Un parallélogramme est un quadrilatère **particulier**, c'est-à-dire une figure géométrique ayant non seulement 4 côtés, mais ayant en plus d'autres propriétés.

⇒ **Démontrer qu'un simple quadrilatère est un parallélogramme, c'est donc démontrer que ce quadrilatère a certaines propriétés.**

2/ Propriétés d'un parallélogramme :

- Les côtés : parallèles et égaux deux à deux
- Les diagonales : elles se coupent en leur milieu (ce qui n'implique pas nécessairement qu'elles soient de même longueur...)
- Les angles : les angles opposés sont égaux

Ces propriétés sont à connaître par cœur si l'on veut pouvoir faire une démonstration.

3/ Les stratégies pour réussir sa démonstration

Pour prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il n'est pas nécessaire de démontrer toutes les propriétés, mais seulement quelques unes. Il y a différentes possibilités en fonction de l'exercice donné.

1/ En passant par les côtés

Si l'on veut démontrer en passant par les propriétés des côtés, deux stratégies possibles :

- a) On prouve que les côtés opposés sont parallèles deux à deux
- ou**
- b) On prouve que deux des côtés sont parallèles et égaux deux à deux

2/ En passant par les diagonales

Ici, une seule stratégie possible : il faut montrer que les diagonales se coupent en leur milieu.

4/ Comment choisir la bonne stratégie ?

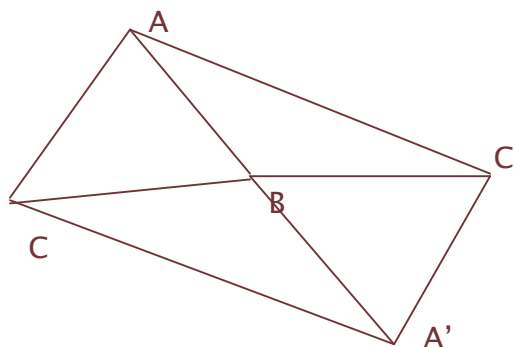
Pour cela, il faut tenir compte de l'exercice donné, c'est-à-dire des informations dont on dispose pour choisir, sur cette base, la meilleure stratégie.

EXEMPLES AVEC DES EXERCICES RESOLUS

Ex1 : Soit un triangle ABC.

- construire le point A', symétrique de A par rapport à B
- construire le point C', symétrique de C par rapport à B

Démontrer que ACA'C' est un parallélogramme.



Les étapes de la réflexion :

(1) On détermine la meilleure stratégie

Dans cette exercice, on a été amené à construire les diagonales de notre quadrilatère (on ne sait pas encore que c'est un parallélogramme !) : [AA'] et [CC']. Il y a donc de forte chance pour que la démonstration s'appuie sur les propriétés des diagonales.

⇒ Dans cet exercice, prouver que ACA'C' est un parallélogramme, c'est prouver que les diagonales [AA'] et [CC'] se coupent en leur milieu B.

(2) On détermine précisément le problème que l'on doit résoudre

La question est donc maintenant la suivante : comment prouver que B est le milieu des diagonales ?

Pour répondre à cette question, il faut se concentrer sur les données de l'exercice. Les constructions que l'on a demandé de faire font partie de ces données.

Conseil : Au brouillon, faire la liste de ces données, afin de ne rien oublier.

(3) La démonstration

On parvient ainsi à la démonstration suivante :

- On sait que A' est le **symétrique** de A par rapport à B . Donc, la propriété des symétries me permet de dire que B est le milieu de $[AA']$.
- On sait que C' est le symétrique de C par rapport à B . Donc on peut déduire, sur la base de la propriété des symétries, que B est le milieu de $[CC']$
- Des deux points précédents, on déduit que $[AA']$ et $[CC']$ se coupent en leur milieu B
- Donc, on peut conclure que $ACA'C'$ est un parallélogramme.

Remarque : une démonstration doit être claire, courte et précise. La démonstration s'appuie sur des éléments connus (la symétrie).

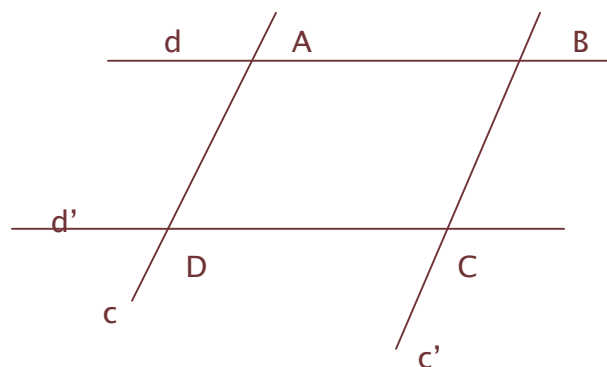
EX2 : Soit d et d' deux droites parallèles

Ces deux droites sont coupées par deux autres droites parallèles, c et c'

La droite c coupe d en A et d' en D

La droite c' coupe d en B et d' en C

Prouve que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



Les étapes de la réflexion

(1) on détermine la meilleure stratégie

Dans cet exercice, nous n'avons pas d'informations sur les diagonales. Il faut donc se rabattre sur les côtés pour faire la démonstration. Quelle stratégie choisir pour les côtés ? La stratégie b (cf. ci-dessus) implique que l'on ait des informations sur la mesure des côtés. Or, ce n'est pas le cas...il faut donc passer par la stratégie a.

(2) On détermine précisément le problème que l'on doit résoudre

Il faut montrer que (AB) est parallèle à (DC) et que (AD) est parallèle à (BC)

(3) La démonstration

- On sait que d est parallèle à d' donc on peut déduire que (AB) est parallèle à (DC)
- On sait que c est parallèle à c' donc on peut déduire que (AD) est parallèle à (BC)
- Des deux points précédents, on déduit donc que $ABCD$ est un parallélogramme car les côtés opposés sont parallèles deux à deux.